Escuela Politécnica Nacional
Facultad de Ciencias
Febrero 2017

EXAMEN DE MEDIA CARRERA
Carrera de Matemática

EJERCICIOS REACTIVOS

1. Dados dos arreglos x, z con n elementos cada uno. Si queremos copiar todos los elementos de x en z y los de z en x, en C++ escribimos:
   (a)
   ```
   x=z;
   z=x;
   ```
   (b)
   ```
   for(int i=0; i<n; i++)
   { x[ i ] = z[ i ];
   z [ i ] = x[ i ];}
   ```
   (c)
   ```
   for(int i=1; i<=n; i++)
   { int aux=x[i];
   x[ i ] = z[ i ];
   z [ i ] = aux;}
   ```
   (d)
   ```
   for(int i=n-1; i>=0; i--)
   { int aux=x[i];
   x[ i ] = z[ i ];
   z [ i ] = aux;}
   ```
2. Sean $V = R_2[t] = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2) : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, $T : V \to V$ definido por $T(p(t)) = p'(t) - 5p''(t)$, entonces:
   (a) La matriz asociada a T con respecto a la base canónica es invertible.
   (b) La matriz asociada a T con respecto a la base canónica es nilpotente.
   (c) T es un inyectivo.
   (d) T tiene 3 valores propios distintos.
3. Considere en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la relación de divisibilidad, definida por: $a|b \iff \exists n \in \mathbb{Z} : b = an$. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es correcta?
   (a) La divisibilidad en $\mathbb{Z}$ define una relación de equivalencia.
   (b) La divisibilidad en $\mathbb{Z}$ define una relación de orden.
   (c) $\forall n \in \mathbb{Z} : 3n|n$
   (d) $\forall n \in \mathbb{Z} : n|0$
4. Sean $V = R_2[t] = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2) : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, $T : V \to V$ definido por $T(p(t)) = (2a_0 - 2a_1 + ma_2) + (3a_1 - 2a_2)t + 2a_2t^2$, donde $m \in \mathbb{R}$, entonces:
   (a) Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 3$ son polinomios cuyo grado depende de m.
   (b) El subespacio propio $E_-(\lambda = 2)$ asociado al valor propio 2 tiene dimensión 1.
   (c) El endomorfismo T es diagonalizable si $m \neq 0$.
   (d) El polinomio mínimo C_T asociado a T es $C_T(x) = (x+2)(x+3)^2$.
5. Sea $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{4} (3s^2 + 1)ds$. Entonces:
   (a) $f'(x) = -2x(3x^2 + 1)$
   (b) $f'(x) = 2x^2(3x^2 + 1)$
   (c) $f'(x) = -2x(3x^4 + 1)$
   (d) $f'(x) = 2x(3x^4 + 1)$
6. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\partial B(0,1)$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$. La integral de superficie
$$\int_{\partial B(0,1)} f(x, y, z)\, dS$$
   está dada por:
   (a) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi, \theta) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$
   (b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi, \theta) \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \, d\theta$

(c) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi,\theta)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta$

(d) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi,\theta)\, d\varphi\, d\theta$

7. Sea $\mathbb{R}^2$ dotado de la norma $\|(x,y)\| = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$. Se define los conjuntos

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1 < x \leq 7,\quad x \leq y \leq x^2\},$$

$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 2 \leq x \leq 7,\quad 2 \leq y \leq 49\}.$$

El complemento del conjunto $C = A\cap B$ es un conjunto:

(a) Cerrado

(b) Ni abierto ni cerrado

(c) Abierto

(d) Ninguna de las anteriores

8. La parte real de la función compleja $f(z) = e^z - \ln(z) + i\sin(z)$, con $z\in\mathbb{C}$, es:

(a) $e^z - \ln(z)$

(b) $e^{\mathrm{Re}(z)} - \ln(\mathrm{Re}(z))$

(c) $e^{\mathrm{Re}(z)}\cos(\mathrm{Re}(z)) - \ln(|z|) - \cos(\mathrm{Re}(z))\sin(\mathrm{Im}(z))$

(d) $e^{\mathrm{Re}(z)}\cos(\mathrm{Im}(z)) - \ln(|z|) + i\cos(\mathrm{Re}(z))\sin(i\,\mathrm{Im}(z))$

9. La variable de una distribución binomial es:

(a) El número de veces que se realiza el fenómeno aleatorio estudiado.

(b) El número de intentos hasta alcanzar r éxitos.

(c) El número de posibles resultados que se obtienen en el proceso estudiado.

(d) El número de éxitos en los n intentos estudiados.

10. El operador diferencial $L = (D - 2(D^2+1))$ anula a:

(a) $2e^{-2x} + 3\cos(x) - \sin(x)$,

(b) $2e^{2x} + 3\cos(x) - \sin(x)$,

(c) $2e^{-x} + 3\cos(2x) - \sin(2x)$,

(d) $2e^{-x} + 3\cos(x) - \sin(x)$.

11. Lee atentamente el siguiente texto:

La diferencia principal entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los números racionales consiste en que en el primero se cumple el axioma del supremo mientras que en el segundo no. Es decir, todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente posee la menor de las cotas superiores; en cambio, hay al menos un conjunto de números racionales (diferente del conjunto vacío) que es acotado superiormente, pero ningún número racional es la menor de las cotas superiores de este conjunto. Esta diferencia entre el conjunto de los números reales y el de los racionales se expresa también de manera equivalente a través del concepto de convergencia de una sucesión y la propiedad de Cauchy de una sucesión.

En efecto, en primer lugar, recordemos que una sucesión de números racionales es convergente en $\mathbb{Q}$ si existe un número racional x tal que para todo número real mayor que cero, existe un índice n_0 tal que la distancia entre cualquier cualquier término de la sucesión de índice mayor o igual que n_0 y q es menor que el mencionado número mayor que cero. Se define de manera similar la convergencia de una sucesión de números reales en $\mathbb{R}$: en este caso x debe ser un número real. En segundo lugar, la definición de sucesión de Cauchy es la misma tanto si la sucesión es de números racionales como de números reales: para todo número real positivo, existe un índice n_0 tal que la distancia entre cualquier par de términos de la sucesión de índices mayores o iguales que n_0 es mejor que el mencionado número real positivo.

Ahora bien, es fácil demostrar que toda sucesión convergente (sea en $\mathbb{Q}$, sea en $\mathbb{R}$) es también una sucesión de Cauchy, y también es fácil probar que hay sucesiones de números racionales que son de Cauchy, pero no son convergentes. En cambio, gracias al axioma del supremo, toda sucesión de números reales de Cauchy también es convergente.

> *La demostración de esta última proposición requiere, principalmente, del axioma del supremo, el cual permite probar que toda sucesión de números reales acotada y monónota es convergente. Utilizando esta última proposición, se prueba el teorema de Bolzano-Weierstrass: toda sucesión de números reales acotada posee una subsucesión convergente. Para esta demostración es necesario recurrir al axioma de elección, sin el cuál no se podría probar el teorema. Este teorema es la herramienta fundamental para probar que la condición de Cauchy no solo es una condición necesaria para la convergencia sino también es una condición suficiente.*
>
> *En efecto, es también sencillo demostrar que toda sucesión de Cauchy es acotada, y que toda sucesión de Cauchy que posee una subsucesión convergente es, ella misma (la sucesión de Cauchy), convergente. Si juntamos estos dos teoremas con el de Bolzano-Weierstrass, queda establecida la equivalencia lógica entre los conceptos de convergencia y de Cauchy para las sucesiones de números reales.*

Considere los siguientes enunciados:

A) Como toda sucesión de Cauchy es acotada, gracias al axioma del supremo, posee una subsucesión convergente; luego, ella misma es convergente.

B) Como toda sucesión de Cauchy es acotada, gracias al teorema de Bolzano-Weierstrass, posee una subsucesión convergente; luego, ella misma es convergente.

C) No es gracias al axioma del supremo sino al teorema de Bolzano-Weierstrass que una sucesión de Cauchy es también convergente.

D) Al demostrar que todas sucesión de Cauchy es convergente, también hemos demostrado que el teorema de Bolzano-Weierstrass resulta ser equivalente al axioma del supremo.

E) Mediante el axioma de elección se prueba el teorema de Bolzano-Weierstrass, pero también hay demostraciones de este teorema que no usan el mencionado axioma.

F) Mediante el axioma de elección se prueba el teorema de Bolzano-Weierstrass, pero también no se podría realizar su demostración sin recurrir al axioma de elección.

Indique cuáles se derivan del texto anterior.

(a) A, C y E.
(b) B, C y F.
(c) A, B y F.
(d) A, D y E.

12. Lee atentamente el siguiente texto:

> *En la prisión de un país extraño, el alcaide (el que custodia a los presos), ha decidido otorgar la libertad a aquellas presas y aquellos presos que demuestren tener buenas capacidades de razonamiento, así que ha preparado la siguiente prueba.*
>
> *Encierra al prisionero (o prisionera) en una celda en la que hay únicamente dos puertas. Cada una de estas, está custodiada por un guardia. Estos gendarmes están autorizados a responder únicamente a una sola pregunta del prisionero con un "Sí"' o con un "No". El prisionero debe elegir una de las dos puertas: una de estas conducirá al prisionero a la libertad inmediatamente, mientras que la otra le devolverá a la prisión de por vida. El alcaide le indica al prisionero que tiene la opción de realizar una sola pregunta a cualquiera de los guardias que custodian las puertas, pero le advierte que uno de estos custodios de las puertas siempre dice la verdad, mientras que el otro, siempre miente.*

¿Cuál de las siguientes preguntas le conducirá a la libertad al prisionero?

(a) Indicando la puerta que conduce a la libertad y dirigiéndose a uno de los guardias (no importa cual): "¿Qué me respondería su compañero si yo le preguntara: *¿Conduce esta puerta a libertad?*".

(b) Indicando una de las puertas (no importa cual) y dirigiéndose al guardia que dice la verdad: "¿Qué me respondería su compañero si yo le preguntara: *¿Conduce esta puerta a libertad?*".

(c) Indicando la puerta que no conduce a la libertad y dirigiéndose a uno de los guardias (no importa cual): "¿Qué me respondería su compañero si yo le preguntara: ¿Conduce esta puerta a libertad?".

(d) Indicando una de las puertas (no importa cual) y dirigiéndose a uno de los guardias (no importa cual): "¿Qué me respondería su compañero si yo le preguntara: *¿Conduce esta puerta a libertad?*".

EJERCICIOS DE DESARROLLO

13. Se desea elaborar tarros cilíndricos de metal, de un litro, para conservas de duraznos. ¿Qué dimensiones tendrá cada tarro para que el costo por el metal utilizado sea mínimo?

14. Usando la definición, muestre que la sucesión $(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, o pruebe que no lo es.

15. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathcal{P}_2(x)$ la aplicación definida por

$$f\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1(x-1)^2+a_2(x-m)+(a_2+a_3).$$

Halle todos los valores de m para los cuales f es un isomorfismo.

16. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales: $x'=x+3y$ y $y'=5x+3y$.

17. Se sabe que la probabilidad de que cierto tipo de animales reaccione positivamente ante la sustancia A es igual a 0.8

    a) Si se les ha inyectado la sustancia A a 12 animales, calcule la probabilidad de que más de 9 reaccionen positivamente.

    b) Calcule la probabilidad de que sea necesario inyectar la sustancia A a más de 5 y máximo a 8 animales para obtener 4 animales con reacción positiva.

    c) De 30 animales de ese tipo se van a inyectar al azar a 8. Calcule la probabilidad de que más de 5 reaccionen positivamente.