Escuela Politécnica Nacional
Facultad de Ciencias
Marzo 2017

EXAMEN DE FIN DE CARRERA
Carrera de Matemática

PARTE I. EJERCICIOS REACTIVOS

1. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y d la métrica asociada. Entonces:
   (a) Existe siempre $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto escalar al cual está asociada la norma $\|\cdot\|$.
   (b) El espacio métrico (X, d) es completo.
   (c) (X, d) es isomorfo a un espacio métrico completo distinto de (X, d).
   (d) Existe un espacio vectorial normado $(Y, \|\cdot\|_1)$ isomorfo a $(X, \|\cdot\|)$ e incompleto.
2. Sean (X, d) un espacio métrico y $M \subseteq X$, $M \neq \emptyset$. Para $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x)$ denotará la bola abierta centrada en x y de radio ε. Entonces:
   (a) M es cerrado $\Leftrightarrow [\forall\, x \in M,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, y \in M \setminus \{x\}$ tal que $y \in B_\varepsilon(x)]$
   (b) M es cerrado $\Leftrightarrow \left[\forall\, x \in \overline{M},\ \exists\, (x_n) \in M^\infty \text{ tal que } d(x_n, x) \to 0\right]$
   (c) M es cerrado $\Leftrightarrow [\forall\, (x_n) \in M^\infty,\ x_n \to x \Rightarrow x \in M]$
   (d) M es cerrado $\Leftrightarrow [\forall\, (x_n) \in M^\infty,\ \exists\, x \in M$ tal que $x_n \to x]$
3. Considere $\mathscr{P}([0,1])$ el espacio vectorial de los polinomios definidos sobre $[0,1]$ al cual lo equipamos con la norma $\|p\| = \max\limits_{0\le x\le 1} |p(x)|$ y sea $T : \mathscr{P}([0,1]) \to \mathscr{P}([0,1])$ el operador definido por $Tp := \frac{d^2p}{dx^2} + 3\frac{dp}{dx} + 2p$. Entonces T es un operador lineal:
   (a) cerrado pero no continuo.
   (b) continuo pero no cerrado.
   (c) continuo y cerrado.
   (d) ni cerrado ni continuo.
4. Sean $\mathbb{K}$ un campo de escalares (real o complejo), E un espacio normado y $f : \mathbb{K} \to E$ una función Gâteaux diferenciable en $\mathbb{K}$. Entonces f es:
   (a) Fréchet diferenciable en $\mathbb{K}$.
   (b) continua en $\mathbb{K}$.
   (c) continuamente diferenciable en $\mathbb{K}$.
   (d) ninguna de las anteriores.
5. Sean $D \subseteq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y $f : D \to \mathbb{C}$ una función compleja. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:
   (a) Si f es holomorfa en D, entonces para cualquier contorno cerrado Γ (no necesariamente simple) contenido en D, se tiene que $\oint\limits_\Gamma f(z)dz = 0$.
   (b) Si f es holomorfa y acotada en $D = \mathbb{C}$, entonces f es una función constante.
   (c) Si f es diferenciable en D, entonces f es holomorfa en D.
   (d) Si f es continua en D y existe un contorno cerrado Γ contenido en D tal que $\oint\limits_\Gamma f(z)dz = 0$, entonces f es holomorfa en D.
6. Considere $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y E' su espacio dual. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es correcta?
   (a) La topología débil estrella $\sigma(E', E)$ es metrizable en la bola unidad cerrada $B_{E'}$.
   (b) Toda sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en E' admite una subsucesión que converge en sentido débil estrella.
   (c) Toda sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en E' admite una subsucesión que converge en sentido débil.
   (d) La bola unidad cerrada $B_{E'}$ en el espacio dual E' es compacta para la topología débil estrella $\sigma(E', E)$.
7. Considere $(H, \|\cdot\|_H)$, un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$, un operador auto-adjunto compacto. Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son los valores propios de T, entonces
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = 1$.
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = +\infty$.
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.
   (d) $|\lambda_n| > \|T\|_{\mathcal{L}(H)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

13. Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ una base ortonormal para el espacio $C([2,7])$ dotado del producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_2^7 f(x)g(x)dx.$$

Dado el desarrollo en serie de Fourier para h, $h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$, donde

$$h : [2,7] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto h(x) = x,$$

entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ es igual a

(a) 351.

(b) 335.

(c) $\frac{351}{3}$.

(d) $\frac{335}{3}$.

14. Dado el problema: encontrar

$$u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, t) \longmapsto u(x, y, t)$$

tal que verifique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \text{en} \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, y, 0) = f(x, y) & \text{en} \quad \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

con f dado en el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. ¿Cuál cree usted que sería la mejor estrategia para enfrentar este problema?

(a) Aproximación de Galerkin-Riez.

(b) Transformada de Fourier.

(c) Teorema Hille-Yosida.

(d) Teorema de Lions.

15. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, acotado, convexo y regular, y $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que verifique

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en} & \Omega \\ u = g & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases}$$

donde $g \geq 0$ pero no nula sobre $\partial\Omega$. Entonces u en Ω es:

(a) positiva.

(b) no positiva.

(c) cero.

(d) negativa.

16. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x) \neq 0$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica definida positiva que produce una norma asociada en $\mathbb{R}^n$

$$\|p\|_A := \sqrt{p^T A p}$$

y $\|\cdot\|_2$ la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$. Usando la factorización $A = L^T L$, la dirección del profundo descenso correspondiente a $\|\cdot\|_A$, es decir, la solución de

$$\min_{\|p\|_A = 1} \nabla f(x)^T p.$$

es:

(a) $p = -\frac{A^{-1}\nabla f(x)}{\|A^{-1}\nabla f(x)\|_2}$.

(b) $p = -\frac{L^{-1}L^{-T}\nabla f(x)}{\|L^{-T}\nabla f(x)\|_2}$.

(c) compacto y conexo.

(d) conexo y no compacto.

23. Considere en S^2, los paralelos y meridianos definidos habitualmente como en Geografía. Entonces, al parametrizar por la longitud de arco:

(a) Todo paralelo y algún meridiano definen una geodésica.

(b) Ningún paralelo define una geodésica.

(c) Ningún meridiano define una geodésica.

(d) Todo meridiano y algún paralelo definen una geodésica.

24. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

(a) El grupo de elementos invertibles en $\mathbb{Z}_{15}^{\times}$ es cíclico.

(b) El máximo común divisor entre dos números consecutivos de la sucesión de Fibonacci es 1.

(c) El anillo $\mathbb{Z}_{15}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

(d) Todo campo tiene exactamente dos ideales.

25. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

(a) Si $k > n$, toda $k-$forma diferencial alternada en una variedad de dimensión n es nula.

(b) Si dos variedades diferenciales tienen la misma cohomología de De Rham, entonces son difeomorfas.

(c) El corchete de Lie no es conmutativo.

(d) La dimensión del espacio tangente a una variedad de dimensión n es $2n$.

26. Considere una función real f para la cual f'' es continua y $f(x) = 0 \neq f'(x)$. Si e_n representa el error del método de Newton en el n-ésimo paso, entonces $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}e_n^{-2}$ es igual a

(a) $\frac{f''(x)}{2f'(x)}$.

(b) 0.

(c) $f(0)$.

(d) $\frac{f''(0)}{2f'(0)}$.

27. Sea A una matriz cuadrada para la cual se calcula su factorización QR. Asumiendo que el método del Gradiente aplicado a la función

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^\top R^\top QRx - b^\top Rx.$$

converge, ¿cuál es el sistema lineal que resuelve?.

(a) $Ax = b$.

(b) $\frac{1}{2}A^\top Rx + \frac{1}{2}R^\top Ax = R^\top b$.

(c) $(A + A^\top)x = b$.

(d) $R^\top QRx = R^\top b$.

28. El número de condición normado de una matriz es:

(a) Mayor o igual que 1.

(b) Mayor o igual que 1 siempre que la norma sea una norma inducida.

(c) Mayor que 1.

(d) No negativa.

29. Se tiene una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ obtenida de una distribución normal con media μ y varianza σ^2 desconocidas. $\bar{X}$ es la media muestral y S^2 la varianza muestral. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(a) $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S}\right)$ tiene distribución $N(0,1)$

(b) $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S}\right)$ tiene distribución t con n grados de libertad.

(c) $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S}\right)$ tiene distribución t con $(n-1)$ grados de libertad

Escuela Politécnica Nacional
Facultad de Ciencias
Marzo 2017

EXAMEN DE FIN DE CARRERA
Carrera de Matemática

PARTE II. ABORDAJE DE UN PROBLEMA

El Análisis Matemático constituye una de las áreas de la Matemática que ha tenido alto impacto en la resolución de problemas, tanto de carácter teórico como aplicado. De este modo, es frecuente encontrarse con problemas con un nivel de complejidad alto, los cuales pueden ser resueltos utilizando varias de las herramientas y resultados que ésta área nos provee. Por ejemplo, una de las complicaciones que podemos encontrarnos al enfrentarnos a un problema es el carácter no lineal del mismo. Estos problemas son precisamente aquellos cuya resolución está basado en métodos analíticos bastante potentes que nos proporciona el Análisis Matemático.

Para entrar en contexto, problemas como el mencionado anteriormente se los encuentra fácilmente en problemas vinculados a las Ecuaciones Diferenciales Parciales en conjunto con la Optimización. Por eso, a continuación, se enunciará ciertos resultados que son muy relevantes al momento de afrontar dichos problemas.

Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki. *Sea E un espacio de Banach. Entonces la bola unidad cerrada*

$$B_{E^*} = \{f \in E^*; \|f\| \leq 1\}$$

es compacta en la topología débil $\sigma(E^*, E)$.*

Teorema de Rellich-Kondrachov. *Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto, acotado y suficientemente regular. Entonces se tiene la siguiente inyección compacta:*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [1, p^*), \quad \textit{donde} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad \textit{con} \quad p < n.$$

Desigualdad de Poincaré. *Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Entonces existe una constante $C > 0$ (dependiente sólo de Ω) tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema. *Sean Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ en $L^p(\Omega)$, donde $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y una función $g \in L^p(\Omega)$ tal que*

- *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ c.t.p. en Ω,*
- *$|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ c.t.p. en Ω y para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Teorema. *Toda norma es débilmente semicontinua inferior.*

Con esto en mente, considere el siguiente problema de Ecuaciones Diferenciales Parciales:

$$(S)\begin{cases} -\Delta u + e^{-\|x\|^2} u = f(u) + h(x), & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ es la bola unidad abierta, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $f(s) = s(1-s)\chi_{[0,1]}(s)$. χ_A es la función indicadora sobre el conjunto A y h una función en $L^2(\Omega)$. Además, considere el siguiente producto escalar en $H_0^1(\Omega)$

$$(u, v)_* = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega e^{-\|x\|^2} uv \, dx.$$

el cual induce una norma $\|\cdot\|_*$ que es equivalente a la norma usual en $H_0^1(\Omega)$.

1. Se define el siguiente funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ (donde $H_0^1(\Omega)$ está equipado con el producto escalar $(\cdot,\cdot)_*$) como:

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - \int_\Omega F(u(x))\, dx - \int_\Omega h(x)u(x)\, dx,$$

con $F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$. Sabiendo que el funcional J es Fréchet diferenciable, calcule la derivada de Gateaux correspondiente y muestre que los puntos críticos de J (u es un punto crítico de J si $J'(u) = 0$, donde J' es la derivada de Fréchet de J) son las soluciones débiles del problema (S).

PARTE III. EJERCICIOS DE DESARROLLO

1. Considere $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es continua}\}$ dotado de la norma $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$. Además, sea $F : C[-1,1] \to \mathbb{R}$, el funcional definido por $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(\pi\tau)x(\tau)\, d\tau$. Pruebe que el funcional lineal F es acotado y halle $\|F\|$.
2. Sean X e Y dos espacios euclídeos y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado. Pruebe que si 0 es el operador cero entonces:
   (a) $T = 0 \Leftrightarrow \langle Tx, y\rangle = 0,\ \forall x \in X$ e $y \in Y$.
   (b) Si X es complejo, $Y = X$ y $\langle Tx, x\rangle = 0,\ \forall x \in X \Rightarrow T = 0$.
3. Sean $A = [-1,1]\times[-1,1]$ y
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si} \quad x^2+y^2>0 \\ 0, & \text{si} \quad x=y=0 \end{cases}$$
   (a) Calcule
$$\int_{-1}^{1} f(x,y)dx, \qquad \int_{-1}^{1} f(x,y)dy$$
   (b) ¿Existe la integral doble en el sentido de Lebesgue en A? Justifique su respuesta e indique si se cumple el Teorema de Fubini.
4. Encontrar la solución del problema de Ecuaciones Diferenciales Parciales siguiente:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (x,y,t) \in]0,1[\times]0,7[\times]0,+\infty[\\ u(x,y,0) = \sin(31\pi x)\sin(\frac{9\pi y}{7}) & \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = 0 & \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0 & \\ u(x,0,t) = u(x,7,t) = 0 & \end{cases}$$
5. Probar que el siguiente problema de valores al borde posee una solución débil
$$\begin{cases} -\Delta u + (3\sin(\|x\|)+41)u = x_N^2 + e^{-\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2}, & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$
   donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y regular.
6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9$.
   (a) Halle un punto estacionario de f.
   (b) Verifique que el punto hallado es un mínimo local.
   (c) Muestre que el punto estacionario es un mínimo global de f.
7. **Dualidad-Lagrangiana:** Establecer los problemas duales del problema lineal y del problema cuadrático, respectivamente.
$$(LP) : \min c^T x \quad \text{sujeto a:} \quad Ax = a,\ x \geq 0.$$
$$(QP) : \min \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \quad \text{sujeto a:} \quad Ax \leq a,\ Bx = b.$$
   donde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica definida positiva, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ y los vectores $c \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^p$.
   Sugerencia: considere las características propias de cada problema para establecer su dual de forma simplificada.
8. Dado un conjunto preordenado $(A, \leq)$ definimos para cada $x \in A$ el conjunto $U_x = \{y \in A : y \leq x\}$.
   (a) Demuestre que la familia $\{U_x\}_{x\in A}$ es una base para una topología sobre A (la cual llamaremos $\mathcal{T}_\leq$).
   (b) Demuestre que si $\leq$ es un orden, entonces la topología $\mathcal{T}_\leq$ verifica el axioma de separación T_0.
   (c) Sean $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$. Demuestre que una función $f : A \to B$ que verifica
$$\forall x, y \in A : x \leq_A y \implies f(x) \leq_B f(y)$$
   es una función continua de $(A, \mathcal{T}_{\leq_A})$ en $(B, \mathcal{T}_{\leq_B})$.