Escuela Politécnica Nacional
Facultad de Ciencias
Enero 2018

EXAMEN DE MEDIA CARRERA
Carrera de Ingeniría Matemática

EJERCICIOS REACTIVOS

1. Una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice unipotente si $A^2 = I_n$. Entonces
   (a) $U = \{A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\ A^2 = I_n\}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,
   (b) $\det(A) = 1$,
   (c) sus valores propios son -1 o 1,
   (d) A es invertible y $A^{-1} = A^T$.
2. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial euclidiano referido al campo $\mathbb{K}$ de dimensión 24. Sea $f: V \to V$ una aplicación lineal tal que $dim(Nuc(f)) = 9$. Entonces
   (a) f es invertible,
   (b) $dim((Im(f))^{\perp}) = 15$,
   (c) $V = Nuc(f) \oplus Im(f)^{\perp}$,
   (d) $f^{-1}((Nuc(f)^{\perp})$ es un subespacio vectorial de V.
3. Sea $A \in \mathbb{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ que tiene por valores propios -5 y 1. El subespacio propio asociado a -5 tiene dimensión 3. Entonces
   (a) A es invertible,
   (b) $\det(A) = -5$,
   (c) A no es diagonalizable,
   (d) el sistema $(A - I_4)v = 0$ solo admite la solución nula.
4. El límite
$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$$
   (a) es 0,
   (b) es 1,
   (c) no existe,
   (d) es ∞.
5. La función $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ tiene en $x = 0$
   (a) un mínimo relativo,
   (b) un máximo relativo,
   (c) un punto de inflexión,
   (d) un mínimo absoluto.
6. Se define la función $f(x) = \int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt$. Dicha función
   (a) tiene puntos de inflexión en $x = -1$ y $x = 1$,
   (b) tiene punto de inflexión en $x = 0$,
   (c) tiene punto de inflexión en $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$,
   (d) no tiene puntos de inflexión.
7. En primer lugar, considere la siguiente definición:

   *Sea f una función de A en B. Se dice que f es **invertible** si y solo si existe una función g de B en A tal que $f \circ g = I_B$ y $g \circ f = I_A$ (I_X es la función identidad sobre el conjunto X)*

   Ahora tome en cuenta las siguientes proposiciones:

   (I) la función $f: A \to B$ es inyectiva,
   (II) la función $f: B \to A$ es sobreyectiva,
   (III) la función $f: B \to A$ es invertible,
   (IV) si $f: A \to B$, existe $g: B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$,
   (V) si $f: A \to B$, existe $g: B \to A$ tal que $f \circ g = I_B$.

Seleccione la opción verdadera:

(a) (I) es una condición necesaria y suficiente para la condición (IV).

(b) (II) es una condición necesaria pero no suficiente para la condición (V).

(c) La conjunción de (IV) y (V) es una condición suficiente pero no necesaria para (III).

(d) (III) es condición necesaria únicamente para la conjunción de las condiciones (IV) y (V).

8. Suponga que $f : A \to B$, $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$. Selecciones la opción verdadera:

   (a) La proposiciones $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$ y $D \subseteq f(f^{-1}(D))$ son verdaderas.

   (b) La proposición $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$ es verdadera si f es sobreyectiva.

   (c) La proposición $D \subseteq f(f^{-1}(D)) \subseteq D$ es verdadera si f es inyectiva.

   (d) La proposiciones $C \subseteq f^{-1}(f(C))$ y $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$ son verdaderas.

9. Suponga que A es un conjunto diferente del vacío, R es una relación de equivalencia en A y R_x es la clase de equivalencia de x donde $x \in A$. Selecciones la opción verdadera:

   (a) La proposición $A \subseteq \bigcup_{x\in A} R_x$ no siempre es verdadera.

   (b) Si $\in A$ y $v \in A$ tales que $R_u \cap R_v \neq \emptyset$, no siempre es verdad que $R_u = R_v$.

   (c) Si $u \in A$ y $v \in A$ tales que $u = v$, entonces $R_u = R_v$; la proposición recíproca no es verdadera necesariamente.

   (d) La proposición $\bigcup_{x\in A} R_x \subseteq A$ no siempre es verdadera.

10. Dados los datos y sus frecuencias $(dato; frecuencia) : (3; 5), (4; 4); (7; 1)$, indique el valor promedio ponderado:

    (a) 4,0

    (b) 3,8

    (c) 14,0

    (d) 12,6

11. En un concurso de merecimientos hay 8 postulantes a un cargo, de los cuales 5 son compañeros de Universidad. Si se contratarán a 2 postulantes, cúal es la probabilidad de que ambos sean compañeros de universidad?

    (a) 0,5

    (b) 0,357

    (c) 0,451

    (d) 0,6

12. Selecciones algunas característica de las pruebas de hipótesis:

    i) Siempre tiene una hipótesis nula.

    ii) Sirve para calcular probabilidades de manera hipotética.

    iii) Si el estadístico de prueba cae en la región de rechazo, se rechaza la hipótesis alterna.

    iv) Solo prueba en función de la muestra tratada, cambia la muestra y puede cambiar la decisión.

    Opciones

    (a) 1 y 4,

    (b) 2 y 3,

    (c) 1, 3 y 4,

    (d) 3 y 4.

13. Sean $p, q > 0$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales para la cual

$$x_n := \frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}{(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge cuando $q \geq p+1$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge cuando $q > p + 1$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge cuando $q > p + 1$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge cuando $p = q$.

14. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $|r| < 1$. El valor de $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$ es

(a) $\frac{r^2}{1-r^2}$;

(b) $\frac{1}{1-r^2}$;

(c) $\frac{r^2}{r^2-1}$;

(d) $\frac{2}{1-r^2}$.

15. Dadas las sucesiones de números reales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x_0$, definimos una nueva sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\begin{aligned} z_{2n-1} &:= x_n \\ z_{2n} &:= y_n. \end{aligned}$$

Se cumple que

(a) $\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{x_0}{2}$;

(b) $\lim_{n\to\infty} z_n = x_0$;

(c) $\lim_{n\to\infty} z_n = 2x_0$;

(d) $\lim_{n\to\infty} z_n = x_0^2$.

16. La superficie de revolución generada al girar, alrededor del eje y, la curva: $\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : z^2 = 4y^3\}$ es:

(a) $S = \{(x,y,z) : x^2 + z^2 = 2y^3\}$

(b) $S = \{(x,y,z) : x^2 + z^2 = 4y^3\}$

(c) $S = \{(x,y,z) : x^2 + z^2 = y^3\}$

(d) $S = \{(x,y,z) : x^2 + z^2 = 8y^3\}$

17. Considere la superficie cerrada W formada por la superficie: $E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4z, \text{ con } : z \geq 2\}$; unida con la superficie: $S = \{(x,y,z) : z^2 = x^2 + y^2, \text{ con } : 0 \leq z \leq 2\}$, y el campo vectorial definido por: $F(x,y,z) = (3x + 8y)i - (4y - 7z)j + (6x + 5z)k$. El flujo de F a través de la superficie cerrada W es igual a:

(a) 48π,

(b) $160\pi/3$,

(c) 32π,

(d) $80\pi/3$.

18. El Jacobiano J del cambio de variable en coordenadas esféricas para la integral triple es igual a:

(a) $J = \rho \sin(\psi)$,

(b) $J = \rho^2 \cos(\psi)$,

(c) $J = \rho \cos(\psi)$,

(d) $J = \rho^2 \sin(\psi)$.

19. Elegir la opción que contiene un factor de integración y la solución de la ecuacion diferencial

$$(2 + \frac{y}{x})dx + (\frac{x}{y} + 2)dy = 0$$

(a) Factor: x^2y^2. Solución $x^2y + xy^2 = c$,
(b) Factor: xy. Solución $2x + 2y = c$,
(c) Factor: xy. Solución $x^2y + xy^2 = c$,
(d) Factor: x^2y^2. Solución $\frac{2}{3}x^3y^2 + \frac{1}{2}x^2y^3 = c$.

20. Elija la opción que contiene la tansformada de Laplace de la siguiente función

$$f(t) = cos^2(2t)$$

(a) $\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+16}$
(b) $\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}$
(c) $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$
(d) $\frac{s^2+8}{s(s^2+16)}$

EJERCICIOS DE DESARROLLO

21. Sea $E \subset \mathbb{R}$ no vacío. Un punto $a \in E$ se dice *semi–aislado* si existe $\epsilon > 0$ tal que al menos alguno de los intervalos $(a - \epsilon, a)$, $(a, a + \epsilon)$ no posee puntos de E. Demuestre que el conjunto de puntos semi–aislados de cualquier conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es a lo más numerable.

22. Un consumidor tiene ciento veinte dólares (USD 120) para comprar semanalmente tres artículos A, B y C. Suponga que los precios unitarios de A, B y C son dos dólares (USD 2), tres dólares (USD 3) y cuatro dólares (USD 4) respectivamente. Suponiendo que la utilidad obtenida por el consumidor de las x unidades del primer artículo, las y unidades del segundo, y las z unidades del tercero, está dada por la función:

$$U(x, y, z) = x^2 y^3 z.$$

    a) Calcule el número de unidades de cada artículo, que debe comprar el consumidor, para maximizar la utilidad.
    b) Determine el valor de la utilidad máxima.

23. Supongamos que hay una prueba para diagnosticar el cáncer que da positivo en el 95 % de los casos cuando se aplica a personas que tienen esta enfermedad y da negativa en el 95 % de los casos cuando se aplica a personas sanas. Si la probabilidad de que una persona tenga cáncer es 0,005. ¿cuál es la probabilidad de que una persona tenga realmente cáncer cuando la prueba le de positivo?

24. Los ingenieros de una empresa han determinado que el nivel de contaminación C que produce un cierto proceso está dado por la función:

$$C(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 - 2ax_1x_2$$

donde x_1, x_2, x_3 son las cantidades de materias primas que se utilizan en el proceso productivo y a un parámetro de calibración.

Existe una regulación gubernamental que no autoriza esos procesos con niveles de contaminación positivos.

Un Matemático que estudia el caso decide que Ud. debe hacer lo siguiente:

    a) Dar una representación matricial simétrica de C.
    b) Expresar C como una suma de cuadrados.
    c) Verificar si existe algún valor del parámetro a para el cual se puede calibrar el proceso de manera que nunca se tengan valores positivos de contaminación.

También se investiga como alternativa posible usar la misma cantidad de materia prima x_1 que la suma de las cantidades de x_2 y x_3.

    d) Hallar un valor del parámetro a que en esta nueva situación permita no tener contaminación.
    e) Dar la recomendación final.