EXAMEN DE FIN DE CARRERA
Carrera de Ingeniería Matemática

PARTE III: EJERCICIOS DE DESARROLLO
TIEMPO: 180 minutos

1. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas uniformemente en el intervalo $[0, \theta]$, con θ desconocido.
   (a) Indique el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ para θ.
   (b) Halle la función de distribución de la variable aleatoria $\hat{\theta}$.
   (c) Calcule $E[\hat{\theta}]$, $Var[\hat{\theta}]$ y $E[(\hat{\theta}-\theta)^2]$.

2. Sean X, Y $v.a.$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} (2x^2y + 3xy^3)b & si \quad x, y \in [0,1] \\ 0 & si \quad x, y \notin [0,1] \end{cases}$$

   Calcule $E[X|Y]$.

3. Si $Y(t)$ denota el tiempo en segundos en que el competidor A está al frente del competidor B cuando el $100t$ por ciento de una carrera ha sido completada, suponiendo que $\{Y(t), 0 \leq t \leq 1\}$ puede ser efectivamente modelado por un Movimiento Browniano con varianza σ^2.
   (a) Si el competidor está ganando por σ segundos en el medio de la carrera. ¿Cuál es la probabilidad de que el competidor A gane la misma?
   (b) Si el competidor A ganó la carrera con un margen de σ segundos, ¿cuál es la probabilidad de que haya estado ganando la misma en la mitad de la carrera?

4. Sean $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ y

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & si\, x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & si\, x = y = 0 \end{cases}$$

   (a) Calcule

$$\int_{-1}^{1} f(x, y)dx, \qquad \int_{-1}^{1} f(x, y)dy$$

   (b) Existe la integral doble en el sentido de Lebesgue en A? Justifique su respuesta e indique si se cumple el Teorema de Fubini.

5. Una empresa que realiza estudios de mercado, desea conocer el gasto promedio del jefe de hogar en útiles escolares, al inicio del año escolar, en un cantón específico. La empresa considera inicialmente dos estratos, la zona urbana y la zona rural, y un tamaño de muestra igual al uno por ciento de hogares en cada zona (o estrato). Los resultados se resumen a continuación:

Zona (Estrato)	**Número de hogares** (N_i)	**Tamaño de la muestra** (n_i)	**Gasto promedio (dólares)**	**Desviación estándar**
Urbana	3604		85	27
Rural	2197		68	19

   (a) Complete los valores del tamaño de la muestra n_i, en cada estrato i (asignación proporcional).
   (b) Estime el gasto promedio en útiles escolares en el cantón.
   (c) Estime la varianza del gasto promedio.
   (d) Encuentre el límite para el error de estimación del promedio, con el 95 % de confianza.

6. Para probar que el estimador de mínimos cuadrados de una función estimable no trivial en un modelo lineal no puede tener varianza nula, pruebe las siguientes afirmaciones:
   (a) Suponga que $X \in \mathbb{M}_{nxp}$ tiene rango $r \leq p$, y sea $P_X = X(X^TX) - X^T$ la matriz de proyección de X. Muestre que para todo $a \in \mathbb{R}^P, P_x a = 0$ si y solo si $X^T a = 0$.
   (b) Sea el modelo $Y = X\beta + \epsilon$, con $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ y $\sigma^2 > 0$. Suponga que $\lambda^T\beta$ es estimable con $\lambda \in \mathbb{R}^P, \lambda \neq 0$. Pruebe que si $\hat{\beta}$ resuelve el sistema normal de ecuaciones ($X^TX\hat{\beta} = X^TY$), entonces $0 < Var(\lambda^T\beta) < \infty$ (observe que las diagonales son estrictas).

7. Suponga que $\{Y_t\}$ es un proceso de media móvil de orden 2, $MA(2) : Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}$, $\epsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma^2)$, donde $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Muestre que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$ donde $\gamma(k)$ es la función de autocovarianza de $\{Y_t\}$.

8. Suponga que los clientes de un almacén llegan según un proceso de Poisson no Homogéneo N_t con función de intensidad $\lambda(t)$, con t en horas. Después de un tiempo T no se permite la entrada de más clientes. Escriba un algoritmo para simular el proceso N_t durante el período $[0, T]$ tomando como función de intensidad

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{t}{24}, & 0 \leq t < 24 \\ t + 24(t - 24), & 24 \leq t < 48 \end{cases}$$

9. En todo trabajo que llegue a un taller se deben realizar 4 operaciones diferentes en 4 máquinas: A, B, C y D. Estas operaciones pueden llevarse a cabo en cualquier orden, sin embargo el *tiempo de arranque* (que implica la espera por limpieza de una máquina, calibraciones, etc.) depende de la operación previa realizada sobre el trabajo. Los tiempos de arranque (en minutos) se dan en la tabla siguiente:

En minutos	A	B	C	D
A	-	15	20	5
B	30	-	30	15
C	25	25	-	15
D	20	35	**10**	-

   Por ejemplo: si la operación previa se realizó en D y luego se hace la siguiente operación en C, en tabla se ve que el costo de arranque es de 10 minutos.
   (a) Formule un modelo de optimización en redes para encontrar la mejor secuencia u orden de las operaciones, que deberían aplicarse a todo trabajo, de manera que se minimice el tiempo total de arrranque.
   (b) Calcule una solución aproximada por un método heurístico.

10. Se requiere proveer de un cierto servicio a un conjunto de clientes $N = \{1, \dots, n\}$. Para ello, se ha identificado un conjunto de lugares $M = \{1, \dots, m\}$ en donde pueden ser construidas instalaciones de infraestructura. Cada instalación construida debe pertenecer a uno de tres tipos posibles: A, B ó C. Estos tipos difieren entre sí por sus capacidades u_A, u_B y u_C, y sus costos de construcción c_A, c_B y c_C.

    Cada cliente $i \in N$ tiene una demanda d_i que debe ser atendida por una sola instalación. Debido a su ubicación geográfica, no todas las instalaciones pueden atender al cliente i. Estas restricciones están expresadas por medio de una matriz binaria de compatibilidades $A = (a_{ij}) \in \{0, 1\}^{n \times m}$, donde $a_{ij} = 1$ si y sólo si el cliente i puede ser atendido por una instalación ubicada en el lugar j. La suma de las demandas de los clientes asignados a una instalación no puede superar la capacidad de ésta.

    Formular un programa entero para de decidir qué instalaciones se deben construir (es decir, de qué tipo y en qué lugar) y cómo deben ser atendidos los clientes, de tal forma que toda la demanda sea cubierta al menor costo posible.