Escuela Politécnica Nacional
Facultad de Ciencias
Marzo 2017

EXAMEN DE FIN DE CARRERA
Carrera de Ingeniería Matemática

PARTE I: EJERCICIOS REACTIVOS
TIEMPO: 120 minutos

1. Para calcular el tamaño de la muestra para el total de una población con una variable cuantitativa, con muestreo aleatorio simple, se debe conocer:
   (a) La varianza del proceso o su estimación obtenida de una muestra.
   (b) La proporción de éxitos en la población.
   (c) La proporción estimada de éxitos en la población.
   (d) La varianza de cada uno de los estratos o su estimación obtenida de una muestra.

2. En aceptación de lotes por muestreo, el error tipo I representa:
   (a) Aceptar un lote cuando se lo debe rechazar
   (b) Rechazar un lote cuando se lo debe aceptar
   (c) Aceptar un lote cuando se lo debe aceptar
   (d) Rechazar un lote cuando se lo debe rechazar

3. En un proceso de aceptación de lotes por muestreo, el nivel de calidad aceptable es igual a:
   (a) La mínima proporción de defectuosos que el consumidor considera aceptable como promedio de defectuosos en los lotes que se inspeccionan
   (b) La mínima proporción de defectuosos que el consumidor está dispuesto a aceptar para cualquier lote
   (c) La máxima proporción de defectuosos que el consumidor considera aceptable como promedio de defectuosos en los lotes que se inspeccionan
   (d) La máxima proporción de defectuosos que el consumidor está dispuesto a aceptar para cualquier lote

4. Para un modelo lineal general $Y = X\beta + \epsilon, \epsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$, con $X \in M_{nxp}$. El estimador de mínimos cuadrados satisface la ecuación normal $X^T X\hat{\beta} = X^T Y$. En un caso particular se encuentra que $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ son soluciones diferentes de la ecuación normal. Una de las siguientes afirmaciones NO es verdadera.
   (a) Existen infinitas soluciones de la ecuación normal.
   (b) El rango de la matriz X es inferior al número de columnas.
   (c) La distribución de $\dfrac{1}{n-p}(Y - X\hat{\beta})^T(Y - X\hat{\beta})$ tiene un distribución Chi cuadrado con $n-p$ grados de libertad.
   (d) La función paramétrica $\lambda^T\beta$ es estimable para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}^p$.

5. Considere un bono con principal de 1000 dólares y madurez de 3 años, y que paga un cupón de 5 % anualmente. Los rendimientos previstos para este bono son: 6 % a 1 año, 7 % a 2 años, y 8 % a 3 años. ¿Cuál es el valor más cercano para este bono?
   (a) $ 904
   (b) $ 924
   (c) $ 930
   (d) $ 950

6. Asuma que la distribución de pérdidas y ganancias de un bien líquido es normalmente distribuido e i.i.d.. Este bien tiene un VaR de 1 día al 95 % de un millón de dólares. ¿Cuál es el valor más cercano VaR de 10 días al 99 % de este bien?. Asuma que la probabilidad acumulada de la distribución normal estándar, ϕ, se comporta linealmente entre los percentiles 95 % y 99 %.
   Recuerdo: $\phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}645$ y $\phi^{-1}(0{,}99) = 2{,}326$
   (a) \$ 220000
   (b) \$ 320000
   (c) \$ 450000
   (d) \$ 1000000

7. Una compañía aseguradora produce pólizas de seguro de vida en tres categorías independientes:
   - Estándar (probabilidad de fallecimiento en el próximo año: 0.010),
   - Preferido: (probabilidad de fallecimiento en el próximo año: 0.005),
   - Superpreferido: (probabilidad de fallecimiento en el próximo año: 0.001).

   Los asegurados de la compañía se distribuyen de la siguiente manera: 50 % son estándar, 40 % son preferidos, y 10 % son superpreferidos. Un asegurado fallece el próximo año.¿Cuál es la probabilidad que el asegurado fallecido sea superpreferido?.
   (a) 0.0001.
   (b) 0.0010.
   (c) 0.0071.
   (d) 0.0141.

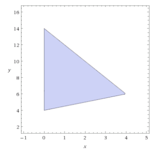
8. Considere la venta de un seguro que puede generar a lo más un siniestro en 1 año. El costo de este siniestro sigue una distribución exponencial de parámetro 0.1. Asumiendo que se cobra una prima igual a 11, ¿cuál es el patrimonio inicial para garantizar una probabilidad de ruina igual a e^{-2}?
   (a) 0.01.
   (b) 0.1.
   (c) 1.
   (d) 9.

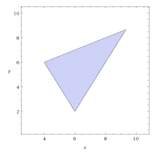
9. Sea u_t un ruido blanco. Entonces, es posible concluir que:
   (a) u_t tiene esperanza no nula.
   (b) u_t está idéntica e independientemente distribuido.
   (c) u_t puede ser temporalmente dependiente, a pesar de no tener memoria.
   (d) u_t también es un paseo aleatorio.

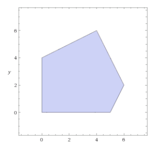
10. Como resultado del teorema de la dualidad fuerte se deduce que si el problema primal es no acotado, el problema dual es:
   (a) No factible
   (b) No acotado
   (c) Óptimo
   (d) Ninguna de las anteriores

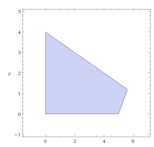
11. Indique la forma que tiene la región factible del problema de programacion lineal:

$$\begin{array}{lrl} maximizar & z = & x + y \\ s.a & & \\ & 2x + y \leq & 14 \\ & -x + 2y \leq & 8 \\ & 2x - y \leq & 10 \\ & x, y \geq 0 & \end{array}$$

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

12. Indique cuál de los modelos dados corresponde al problema dual del siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lrll} maximizar & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ s.a. & & & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq & b_i & (i = 1, \ldots, m) \\ & x_j \geq & 0 & (j = 1, \ldots, n) \end{array}$$

(a)
$$\begin{array}{lrll} minimizar & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & & \\ & s.a. & & \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq & c_j & (j = 1, \ldots, n) \\ & y_i \geq & 0 & (i = 1, \ldots, m) \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lrll} minimizar & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & & \\ & s.a. & & \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq & c_j & (j = 1, \ldots, n) \\ & y_i \geq & 0 & (i = 1, \ldots, m) \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{lrll} minimizar & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & & \\ & s.a. & & \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq & c_j & (j = 1, \ldots, n) \\ & y_i \leq & 0 & (i = 1, \ldots, m) \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{lrll} maximizar & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & & \\ & s.a. & & \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq & c_j & (j = 1, \ldots, n) \\ & y_i \geq & 0 & (i = 1, \ldots, m) \end{array}$$

13. Para asegurar la buena salud de los animales en una granja, se los debe alimentar con una dieta que contenga al menos 24 gramos de grasa, 36 gramos de carbohidratos y 4 gramos de proteína. El consumo total de alimento no debe superar 5 onzas al día. En lugar de comprar alimento balanceado, es más barato comprar comida marca X y comida marca Y y mezclarlas para alimentar a los animales. La comida X contiene 8 gramos de grasa, 12 gramos de carbohidratos y 2 gramos de proteína por onza y cuesta \$0,20 por onza. Por otro lado, la comida Y contiene 12 gramos de grasa, 12 gramos de carbohidratos y 1 gramos de proteína por onza y cuesta \$0,30 por onza. El objetivo es alimentar a los animales al menor costo posible satisfaciendo sus necesidades nutricionales.
Siendo x: onzas del alimento marca X e y: onzas del alimento marca Y, el modelo de programación lineal adecuado para la modelización del problema propuesto es:

(a)
$$\begin{array}{lll} minimizar & z = & = 0{,}20x + 0{,}30y \\ s.a & & \\ & 8x + 12y \leq & 24 \\ & 12x + 12y \leq & 36 \\ & 2x + y \leq & 4 \\ & x + y \geq & 5 \\ & x, y \geq 0 & \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lll} minimizar & z = & = 0{,}20x + 0{,}30y \\ s.a & & \\ & 8x + 12y \geq & 24 \\ & 12x + 12y \geq & 36 \\ & 2x + y \geq & 4 \\ & x + y \leq & 5 \\ & x, y \geq 0 & \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{lll} minimizar & z = & = 0{,}20x + 0{,}30y \\ s.a & & \\ & 8x + 12y \geq & 24 \\ & 12x + 12y \geq & 36 \\ & 2x + y \geq & 4 \\ & x + y \leq & 5 \\ & x, y \leq 0 & \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{lll} minimizar & z = & = 0{,}20x + 0{,}30y \\ s.a & & \\ & 8x + 12y \geq & 24 \\ & 12x + 12y \geq & 36 \\ & 2x + y \geq & 4 \\ & x + y \geq & 5 \\ & x, y \geq 0 & \end{array}$$

14. Dada una red orientada $R = (V, E; d)$ donde $d : E \to \mathbb{R}$ es la distancia para atravesar un arco, la condición necesaria y suficiente para que se pueda calcular la distancia más corta entre cualquier par de vértices de la red R es que:
   (a) El grafo $G = (V, E)$ contenga una raíz, es decir, sea cuasi-fuertemente conexo y que además no tenga circuitos de longitud negativa.
   (b) El grafo $G = (V, E)$ sea fuertemente-conexo y no contenga circuitos.
   (c) El grafo $G = (V, E)$ sea fuertemente-conexo y no contenga circuitos de longitud negativa.
   (d) El grafo $G = (V, E)$ contenga una raíz y no tenga circuitos.

15. Considerar el poliedro $P := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1 \wedge 2x_1 \leq 3\}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdaderas?
    (a) P es un poliedro integral.
    (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{lin}(P)$
    (c) P es un poliedro con punta.
    (d) $\operatorname{rec}(P) = \emptyset$

16. Considere la clasificación de n números almacenados en un arreglo A. El método consiste en encontrar el elemento más pequeño de A e intercambiarlo con el elemento $A[1]$. Luego encontrar el segundo elemento más pequeño de A e intercambiarlo con $A[2]$. Continuar de esta manera para los primeros $n-1$ elementos del arreglo. El orden del algoritmo es:
    (a) $O(n)$
    (b) $O(n \times log(n))$
    (c) $O(n^2)$
    (d) $O(log(n))$

17. Un grafo es un par ordenado $G = (V, A)$ donde V es un conjunto finito y A es una familia de pares ordenados de V. La matriz de adyacencia Θ es una matriz cuadrada que se utiliza como una forma de representación de grafos no dirigidos. La matriz es definida por:
$$\theta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } e = (i,j) \in E, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$
    La longitud de codificación de un grafo usando esta forma de almacenamiento es:
    (a) $|A| + |V| \times |A| + |V|$
    (b) $|V| \times |V|$
    (c) $|A| \times |A|$
    (d) $|A| * |V| \times |A| * |V|$

18. Dado el siguiente fragmento de código:
```
int main()
{
 pair<int,int>  x,*px,*py;
 x=make_pair(3,4);
 px=new pair<int,int>[2];
 py=new pair<int,int>;
 *px=x;
 px->first=px[0].first+px[0].second;
 px->second++;
 px[1].first= px[0].second+4;
 px[1].second= px[0].first+px->second;
 py->first=px[0].first+px[1].first;
 py->second=px[0].second-px[1].second;
 return 0;
}
```
    El valor de py es:

(a) $py = (16, -7)$
(b) $py = (10, 4)$
(c) $py = (3, 4)$
(d) $py = (9, 12)$

19. Una variable aleatoria X es una variable aleatoria de $Weibull(k, \lambda)$ si su función de distribución es

$$f(x; \lambda, k) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Usando el método de la transformada inversa, podemos obtener una variable aleatoria si generamos un número aleatorio $U \in [0, 1]$ y calculamos:
(a) $X = \frac{\lambda}{k}\sqrt[k]{-ln(1-U)}$
(b) $X = \lambda\sqrt[k]{-ln(1-U)}$
(c) $X = \lambda\sqrt{(-ln(1-U))^k}$
(d) $X = \frac{1}{\lambda}\sqrt[k]{-ln(U)}$

20. Sea A una matriz cuadrada para la cual se calcula su factorización QR. Asumiendo que el método del Gradiente aplicado a la función

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^\top R^\top QRx - b^\top Rx,$$

converge. ¿Cuál es el sistema lineal que resuelve?
(a) $Ax = b$.
(b) $\frac{1}{2}A^\top Rx + \frac{1}{2}R^\top Ax = R^\top b$
(c) $(A + A^\top)x = b$
(d) $R^\top QRx = R^\top b$

21. El número de condición normado de una matriz es:
(a) Mayor o igual que 1.
(b) Mayor o igual que 1 siempre que la norma sea una norma inducida.
(c) Mayor que 1.
(d) No negativa.

22. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces:
(a) Toda sucesión acotada es de Cauchy.
(b) Toda sucesión de Cauchy es convergente.
(c) Toda sucesión acotada es convergente.
(d) Existe al menos una sucesión de Cauchy que diverge.

23. Sea (X, d) es espacio métrico y $M \subset X$, $M \neq \emptyset$. Entonces para $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x)$ es la bola abierta centrada en x y de radio ε,
(a) M es cerrado $\Leftrightarrow [\forall x \in M,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in M \setminus \{x\}$ tal que $y \in B_\varepsilon(x)]$
(b) M es cerrado $\Leftrightarrow \left[\forall x \in \overline{M},\ \exists (x_n) \in M^\infty \text{ tal que } d(x_n, x) \to 0\right]$
(c) M es cerrado $\Leftrightarrow [\forall (x_n) \in M^\infty,\ x_n \to x \Rightarrow x \in M]$
(d) M es cerrado $\Leftrightarrow [\forall (x_n) \in M^\infty,\ \exists x \in M$ tal que $(x_n) \to x]$

24. Se tiene una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ obtenida de una distribución normal con media μ y varianza σ^2 desconocidas. $\bar{X}$ es la media muestral y S^2 la varianza muestral.
    Marque la respuesta correcta:
    (a) $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S}\right)$ tiene distribución $N(0,1)$
    (b) $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S}\right)$ tiene distribución t con n grados de libertad.
    (c) $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S}\right)$ tiene distribución t con $(n-1)$ grados de libertad.
    (d) $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)$ tiene distribución t con $(n-1)$ grados de libertad.

25. Sea $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), L)$ un espacio con medida, donde L es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Se define

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & si\, n \leq x \leq n + \dfrac{1}{n} \\ 0, & caso\, contrario. \end{cases}$$

    Marque la respuesta correcta:
    (a) Se satisface el Lema de Fatou.
    (b) Se satisface el Teorema de Convergencia Acotada.
    (c) Se satisface el Teorema de Lebesgue sobre Convergencia Monótona.
    (d) Se satisface el Teorema de Lebesgue sobre Convergencia Dominada.

26. Si A_i es una sucesión de eventos independientes, entonces $P(\limsup_i A_i) = P(A_i$ infinitas veces$)$ es igual a cero si y solamente si:
    (a) $\sum_i P(A_i) < \infty$
    (b) $\sum_i P(A_i) = \infty$
    (c) $\sum_i P(A_i) = 0$
    (d) $\sum_i P(A_i) = 1$

27. Si X_n es una sucesión de $v.a.$ no correlacionadas con media μ y varianza σ^2. Usando la desigualdad de Chbyshev se puede mostrar que para $\epsilon > 0$ y cada $n \geq 1$
    (a) $P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - \mu}{n}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon}$
    (b) $P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - \mu}{n}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$
    (c) $P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - \mu}{n}\right| > \epsilon\right) \geq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$
    (d) $P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - \mu}{n}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$

28. Si el polinomio asociado a la parte AR de un proceso $ARMA(X_t)$ tiene raíces de valor absoluto diferente de 1 y el proceso no se encuentra expresado en su forma canónica, ¿se puede aplicar el TCL?
    (a) No, porque el proceso no es lineal.
    (b) Si, porque el proceso es una media móvil infinita.
    (c) No, porque el proceso no es invertible.
    (d) Si, porque el proceso es lineal e invertible.

29. ¿Se puede utilizar un modelo VAR para analizar un conjunto de series con la misma estacionalidad?
    (a) Si, porque todas las series son del mismo tipo.
    (b) Si, porque un modelo VAR puede tratar series con el mismo orden de integración.
    (c) No, porque las series no son estacionarias.
    (d) No, porque las series deben ser cointegradas.

30. Considere una cadena de Markov. Se dice que un estado i es recurrente si:
    (a) $P(X_n = i \text{ para algún } n \geq 1 | x_0 = i) = 0$
    (b) $P(X_n = i \text{ para algún } n \geq 1 | x_0 = i) < 1$ y diferente de cero.
    (c) $P(X_n = i \text{ para algún } n \geq 1 | x_0 = i) = 1$
    (d) Ninguna de las anteriores.